Abstract: The method of computation of descrete Fourier transform for polynomials of many variables over the ring $Z_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$ is considered. Theoretical complexity of the stated approach is provided.
Keywords: computer algebra; descrete Fourier transform; fast Fourier transform; theory of algorithms.

Лапаев Алексей Олегович
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: alapaev@gmail.com

Alexei Lapaev
post-graduate student
Tambov State University
named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: alapaev@gmail.com

УДК 517.929, 519.71

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **А. С. Ларионов, В. В. Лузгин, В. В. Панасов**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; функция Коши; система автоматического регулирования; устойчивость.

Аннотация: Предлагаются достаточные условия положительности функции Коши и фундаментального решения дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом; эти условия используются для получения признаков устойчивости решений уравнения, описывающего динамику системы автоматического регулирования.

Многие процессы, протекающие в реальных системах, не могут быть адекватно описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями. Все более актуальными в последнее время становятся такие прикладные задачи, в которых требуется учитывать одно из фундаментальных свойств любых реальных систем и объектов – запаздывание. Запаздывание обусловлено как необходимостью передачи сигнала, энергии или вещества во времени, так и тем обстоятельством, что на сбор и обработку информации, а также на принятие решений, например в системах автоматического регулирования, требуется определенное время [1, 2]. Для математического описания такого рода систем и объектов все большее применение находят дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, являющиеся актуальными представителями класса функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), которые в линейном случае можно записать в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t),\ t \in [a, \infty), \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : AC^n \to L^n$— линейный ограниченный оператор (здесь $AC^n$— банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$, $L^n$— банахово пространство суммируемых на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset [a, \infty)$ функций $z : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$).

Теория ФДУ в настоящее время интенсивно развивается, основные результаты этой теории приведены в монографиях [3, 4] (см. также обзоры [1, 5]). При естественных предположениях относительно уравнения (1) его общее решение задается формулой Коши [3, 4]

$$x(t) = X(t)x(a) + \int_a^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{2}$$

где $C(t,s)$ – матрица Коши, $X(t)$ – фундаментальная матрица уравнения (1). Из формулы (2) следует, что асимптотические свойства уравнения (1) полностью определяются асимптотическим поведением матриц $C(t,s)$ и $X(t)$.

В докладе рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} H_k(t)x[\tau_k(t)] = f(t),\ t \in [a,\infty), \tag{3}$$

$$x(\xi) = 0, \quad \text{если} \quad \xi < a,$$

где $H_k, f \in L$; функции $\tau_k : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ измеримы, $\tau_k(t) \leqslant t$ при почти всех $t \in [a,\infty)$, $k = 1,\ldots,m$.

Если параметры уравнения (3) постоянны, то условия устойчивости решений можно получать [5], исследуя корни характеристического уравнения (квазиполинома) или применяя частотные критерии. В докладе приводятся достаточные условия положительности функции Коши и фундаментального решения уравнения (3) и основанные на этих условиях утверждения о сравнении решений, что позволяет получать признаки устойчивости этого уравнения. Эти признаки применяются для исследования динамики систем автоматического регулирования, которые описываются уравнением (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кордуняну К., Лакшмикантам В.* Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика, 1985. №7. С. 5-44.

2. *Мухопад Ю.Ф.* Микроэлектронные информационно-управляющие системы: учеб. пособие. Иркутск: ИрГУПС, 2004.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

5. *Колмановский В.Б.* Уравнения с последействием и математическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. 1996. №4. С. 122-127.

Abstract: some sufficient conditions of positiveness of Cauchy‘s function and a fundamental solution of delay differential equation of the first order are proposed; these conditions for receiving of stability signs solutions an equation are used; this equation describes the dynamics properties of system of automatic regulation.

Keywords: functional differential equation; Cauchy‘s function; system of automatic regulation; stability.

Ларионов Александр Степанович
к. ф.-м. н., доцент
Братский государственный университет
Россия, Братск
e-mail: larios84@yandex.ru

Aleksandr Larionov
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Bratsk State University
Russia, Bratsk
e-mail: larios84@yandex.ru

Лузгин Владимир Васильевич
к. т. н., доцент
Братский государственный университет
Россия, Братск
e-mail: rasp@brstu.ru

Vladimir Luzgin
candidate of tech. sciences,
senior lecturer Bratsk State University
Russia, Bratsk
e-mail: rasp@brstu.ru

Панасов Вячеслав Владимирович
Братский государственный университет
Россия, Братск
e-mail: rasp@brstu.ru

Vyacheslav Panasov
Bratsk State University
Russia, Bratsk
e-mail: rasp@brstu.ru

УДК 517.977.58

# ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ МНОЖЕСТВ СИММЕТРИИ [1]

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

Ключевые слова: минимаксное решение уравнения в частных производных первого порядка; задача Дирихле; задача быстродействия; множество симметрии; эйконал.

Аннотация: Приводится метод построения функции оптимального результата в задаче быстродействия, основанный на выделении множества симметрии краевого условия. Развивается численно-аналитический подход к аппроксимации множества управляемости. Устанавливается связь решения задачи быстродействия с решением задачи о построении эволюции волновых фронтов при конструировании эйконала. Приводятся результаты моделирования решений динамических задач быстродействия и задач геометрической оптики.

Изучается задача Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби

$$\min_{\nu:\|\nu\|\leqslant 1} \langle \nu, Du(\mathbf{x})\rangle + 1 = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — евклидова норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $\Gamma$ — граница замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$, $Du(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ — градиет функции $u = u(\mathbf{x})$.

Минимаксное решение [1] задачи Дирихле (1)–(2) совпадает с функцией оптимального результата соответствующей задачи динамического быстродействия с круговой индикатрисой скоростей. Исследуется достаточно общий случай краевого (целевого) множества $M$. Предполагается, что $M$ является, вообще говоря, невыпуклым множеством с негладкой границей. Предлагается

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 08-01-00587-а, Программы государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2640.2008.1 и федеральной программы Президиума РАН №29.